This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

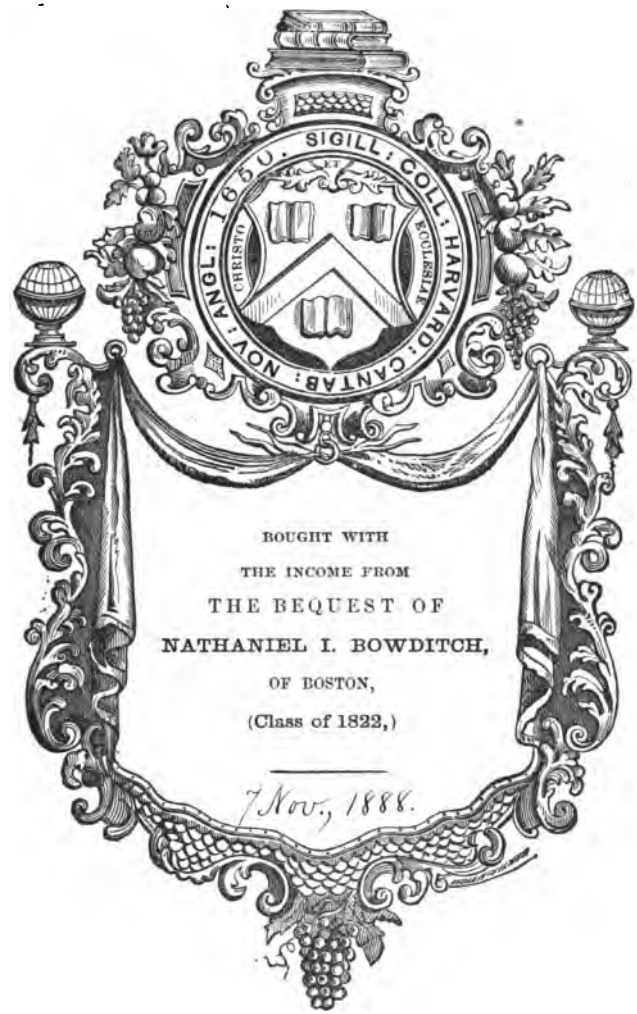
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

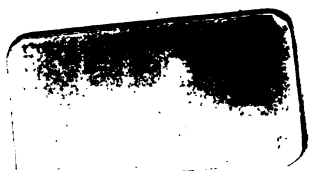
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 3268.79



SCIENCE CENTER LIBRARY



780

UEBER DIE INTEGRATION

VERMITTELST EXPLICITER FUNKTIONEN

DERJENIGEN

HOMOGENEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG

m^{ter} ORDNUNG,

DEREN INTEGRALE NUR FÜR UNENDLICH GROSSE WERTHE
DER VARIABELEN UNSTETIG WERDEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT ZU HEIDELBERG

VORGELEGT VON

CARL KOEHLER
AUS MANNHEIM.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1879.

~~VI. 4327~~
Math 3268.79

HARVARD COLLEGE
NOV 7 1888
LIBRARY.

Bowditch Fund.

SEINEM HOCHVEREHRTEN LEHRER

HERRN PROFESSOR DR. L. FUCHS

IN DANKBARER GESINNUNG

GEWIDMET

VOM

VERFASSER.

Herr Liouville hat im vierten Bande seines Journals, pag. 423 ff., eine Abhandlung veröffentlicht über die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P \cdot y$$

durch explicite Funktionen, wenn P eine ganze rationale Funktion von x ist.

In dieser Arbeit sollen ähnliche Untersuchungen, wie sie Herr Liouville für die obige Differentialgleichung zweiter Ordnung durchgeführt hat, in Bezug auf die allgemeine homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + P_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + P_m y = 0, \quad . \quad . \quad \text{(A)}$$

deren Coefficienten P ganze rationale Funktionen von x sind, veranstaltet und dadurch festgestellt werden, von welcher Beschaffenheit, wenn diese Differentialgleichung überhaupt durch explicite Funktionen zu befriedigen ist, jedenfalls eines der partikulären Integrale, die etwa gleich solchen Funktionen sind, sein muss.

Um die Resultate, die ich erhalten habe, ableiten zu können, ist es nöthig, zunächst die Definition der expliciten Funktionen, wie sie Herr Liouville gibt, sowie einen von diesem Autor aufgestellten Lehrsatz, von dem wir häufig Gebrauch machen werden, zu citiren.

Wenn man mit $\varpi(x)$ eine algebraische Funktion von x bezeichnet (wobei es nicht darauf ankommen soll, ob sich diese Funktion durch Wurzelgrössen darstellen lässt oder nicht), so werden die expliciten Funktionen auf folgende Weise definirt: eine explicite Funktion von x ist eine Funktion dieser Variabelen, die dargestellt werden kann, indem man eine endliche Anzahl mal die Zeichen der algebraischen Funktion, des Logarithmus und der Exponentialfunktion, d. h. die Zeichen $\varpi(x)$, $\log x$, e^x anwendet. Die einfachsten expliciten Funktionen sind die algebraischen. Man nennt diejenigen expliciten Funktionen, die nicht algebraische sind, transcendente Funktionen. Sind die auf die transcendenten Operationen bezüglichen Zeichen, die in einer solchen Funktion vorkommen, nur über algebraische Funktionen ausgedehnt,

so nennt man diese Funktion eine transcendente Funktion erster Art. Wenn der Ausdruck einer Funktion, welche nicht algebraisch und nicht auf eine transcendente Funktion erster Art zurückführbar ist, die auf die transcendenten Operationen bezüglichen Zeichen höchstens auf Transcendenten erster Art angewendet enthält, so nennt man diese Funktion eine transcendente Funktion zweiter Art u. s. w.

(Vgl. Liouville's Journal, t. IV, pag. 426.)

Um den von Herrn Liouville aufgestellten Lehrsatz, auf den wir uns öfter beziehen werden, aussprechen zu können, müssen wir zunächst erklären, was Herr Liouville unter einer monomen Transcendenten versteht. Derselbe nennt eine Transcendente monom, wenn sie aus einem einzigen Ausdruck von der Form e^u oder $\log u$ besteht, wo u eine ganz beliebige Funktion ist, und bezeichnet im Allgemeinen als monome Transcendente n^{ter} Art eine solche, bei der die Funktion u eine transcendente Funktion $(n-1)^{ter}$ Art ist. Eine transcendente Funktion n^{ter} Art enthält demnach jedenfalls monome Transcendenten n^{ter}, eventuell auch solche niedererer Art. Wir bemerken gleich hier, da die Richtigkeit eines grossen Theiles der folgenden Deduktionen auf dieser Bemerkung beruht, dass der Index n, welcher die Art einer transcendenten Funktion bezeichnet, durch Differentiation der Funktion erniedrigt, nie aber erhöht werden kann, und dass in die Ableitung einer Funktion nur diejenigen monomen Transcendenten eintreten können, die schon in der Funktion selbst enthalten sind; es ergibt sich diese Thatsache direkt aus den Regeln der Differentialrechnung.

Nun können wir den Satz des Herrn Liouville aussprechen; derselbe gilt unter der Voraussetzung, dass in der transcendenten Funktion n^{ter} Art, von welcher in ihm die Rede ist, die Anzahl der vorkommenden Transcendenten n^{ter} Art möglichst klein ist, d. h. dass es keine andere dieser Funktion äquivalente Funktion n^{ter} Art gibt, die weniger Transcendenten n^{ter} Art enthält als diese. Unter dieser Voraussetzung lautet der Satz:

Wenn ϑ, η, ζ u. s. w. monome Transcendenten n^{ter} Art bezeichnen, die in einer transcendenten Funktion n^{ter} Art enthalten sind, so muss jede algebraische Relation zwischen x, ϑ, η, $\zeta \cdots$ und den etwa vorhandenen Transcendenten von niedererer als n^{ter} Art identisch sein in Bezug auf ϑ, η, $\zeta \cdots$, d. h. sie muss bestehen bleiben, wenn man ϑ, η, $\zeta \cdots$ ersetzt durch beliebige andere Funktionen von x oder durch einfache unbestimmte Buchstaben.

(Vgl. Liouville's Journal, t. II, pag. 76.)

Nun können wir zur Behandlung unserer Aufgabe schreiten, die darin besteht, zu ermitteln, von welcher Beschaffenheit jedenfalls eines der partikulären Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + P_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + P_m y = 0, \quad . \quad . \quad (A)$$

deren Coefficienten ganze rationale Funktionen von x sind, sein muss, falls diese Differentialgleichung durch explicite Funktionen befriedigt werden kann.

§. 1.

Wir setzen zunächst voraus, dass die explicite Funktion, die ein Integral unserer Differentialgleichung ist, Transcendenten enthält, und wählen, wenn es mehrere derartige Integrale gibt, dasjenige unter ihnen, das von der niedersten Art ist. Es sei von n^{ter} Art, dann muss in ihm mindestens eine monome Transcendente n^{ter} Art enthalten sein; wir weisen nun nach, dass, wenn die Zahl der in diesem Integral vorkommenden monomen Transcendenten n^{ter} Art auf ihr Minimum reducirt ist, keine derselben von der Form

$$\vartheta = \log v,$$

wo v eine transcendente Funktion $(n-1)^{\text{ter}}$ Art bedeutet, sein kann.

Zu diesem Zwecke nehmen wir an, es gäbe ein solches Integral n^{ter} Art, das die Transcendente n^{ter} Art $\vartheta = \log v$ enthält, und stellen dasselbe dar in der Form

$$y = F(x, \vartheta),$$

dann ist diese Funktion F algebraisch in Bezug auf ϑ (sie kann noch andere Transcendenten n^{ter} und niedererer Art enthalten, doch ist es für den folgenden Beweis nicht nöthig, dieselben ausdrücklich hervorzuheben). Durch Differentiation von y ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x, \vartheta),$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = F_2(x, \vartheta),$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} = F_m(x, \vartheta),$$

wo die Funktionen, die wir mit $F_1, F_2 \cdots F_m$ bezeichnet haben, sämmtlich algebraisch sind in Bezug auf ϑ und nur diejenigen monomen Transcendenten, die in $F(x, \vartheta)$ selbst vorkommen, enthalten können.

Setzt man die Werthe der Funktion y und ihrer Ableitungen in die Differentialgleichung (A) ein, so erhält man die Gleichung

$$F_m(x, \vartheta) + P_1 F_{m-1}(x, \vartheta) + \cdots + P_{m-1} F_1(x, \vartheta) + P_m F(x, \vartheta) = 0;$$

dieselbe ist algebraisch in Bezug auf ϑ, sie muss also nach dem in der Einleitung citirten Satze (vgl. pag. 6) bestehen bleiben, wenn man in ihr $\mu + \vartheta$ an die Stelle von ϑ setzt, wo μ eine ganz beliebige Constante ist, man hat mithin die Gleichung

$$F_m(x, \mu + \vartheta) + P_1 F_{m-1}(x, \mu + \vartheta) + \cdots + P_m F(x, \mu + \vartheta) = 0. \quad (1)$$

Bildet man aber von der Funktion

$$y = F(x, \mu + \vartheta)$$

die m ersten Ableitungen, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x, \mu + \vartheta),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F_2(x, \mu + \vartheta),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = F_3(x, \mu + \vartheta),$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^my}{dx^m} = F_m(x, \mu + \vartheta),$$

d. h. man erhält jetzt genau dieselben Funktionen von x und $\mu + \vartheta$, wie vorhin von x und ϑ, wovon man sich durch Ausrechnung leicht überzeugt; wenn ϑ nicht der Logarithmus einer Funktion von x wäre, so ergäbe sich dieses Resultat nicht mehr. Setzt man die obigen Werthe von y, $\frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^my}{dx^m}$ in die linke Seite der Differentialgleichung (A) ein, so erhält man einen Ausdruck, der nach Gleichung (1) gleich Null ist, es ist also

$$y = F(x, \mu + \vartheta)$$

ebenfalls ein Integral der Differentialgleichung (A), wenn

$$y = F(x, \vartheta)$$

ein solches ist.

Durch Differentiation der Differentialgleichung (A) nach μ entsteht die Gleichung

$$\frac{d^m\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1}\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)}{dx^{m-1}} + \cdots + P_m \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right) = 0,$$

wir besitzen folglich in $\frac{\partial y}{\partial \mu}$ und, wie man sofort sieht, auch in allen folgenden Ableitungen von y nach μ Integrale unserer Differentialgleichung.

Indem wir die m ersten dieser Ableitungen bilden und dann $\mu = 0$ setzen, erhalten wir die Integrale

$$F'_\vartheta(x, \vartheta),\ F''_\vartheta(x, \vartheta),\ \cdots F^{(m)}_\vartheta(x, \vartheta).$$

Wären unter ihnen einige, die für jeden Werth von x verschwinden und $F^{(k)}_\vartheta(x, \vartheta)$ dasjenige unter diesen, das die niederste Ableitung von F nach ϑ ist, d. h. das den kleinsten Index k hat, so müsste die für ϑ algebraische Gleichung

$$F^{(k)}_\vartheta(x, \vartheta) = 0$$

noch erfüllt sein, wenn man an Stelle von ϑ die unbestimmte Grösse i einführt, es müsste also

$$F^{(k)}_i(x, i) = 0$$

sein; hierin könnte man $F(x, i)$ als Funktion von i auffassen, es ergäbe sich dann durch Integration

$$F^{(k-1)}_i(x, i) = \left[F^{(k-1)}_i(x, i)\right]_{i=i_0},$$

wo i_0 ein willkürlich gewählter spezieller Werth von i ist; man könnte jetzt i wieder durch ϑ ersetzen und hätte so in

$$F^{(k-1)}_\vartheta(x, \vartheta) = \left[F^{(k-1)}_i(x, i)\right]_{i=i_0}$$

ein Integral, das ϑ nicht mehr, ausserdem nur die in $y = F(x, \vartheta)$ selbst vorkommenden Transcendenten, folglich weniger Transcendenten n^{ter} Art als y enthält, das mithin unserer Voraussetzung widerspricht. Es kann dieses Integral $F^{(k-1)}_\vartheta(x, \vartheta)$ nicht selbst für jeden Werth von x verschwinden, weil wir die Annahme gemacht haben, es sei der Index k kleiner als der jedes anderen für jeden Werth von x verschwindenden Integrals; wäre $k = 1$, so ergäbe sich genau wie eben, dass $F(x, \vartheta)$, gegen die Voraussetzung, ϑ nicht enthielte; es ist somit in jedem Falle nachgewiesen, dass keines der obigen m Integrale für jeden Werth von x Null werden kann.

Betrachten wir nun das System der $m + 1$ Integrale

$$F(x, \vartheta),\ F'_\vartheta(x, \vartheta),\ F''_\vartheta(x, \vartheta),\ \cdots F^{(m)}_\vartheta(x, \vartheta),$$

so muss entweder zwischen den m ersten derselben eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten bestehen, oder diese bilden ein Fundamentalsystem.

Dass diese m Integrale einer linearen homogenen Gleichung mit constanten Coefficienten nicht genügen können, werden wir jetzt zeigen.

Es sei, wenn wir mit $A, B \cdots N$ bestimmte Constanten bezeichnen,

$$F_{\vartheta}^{(m-1)}(x,\vartheta) + AF_{\vartheta}^{(m-2)}(x,\vartheta) + BF_{\vartheta}^{(m-3)}(x,\vartheta) + \cdots + NF(x,\vartheta) = 0 \quad (2)$$

eine solche Gleichung; da sie algebraisch ist in Bezug auf ϑ, so lässt sich dieses durch die unbestimmte Grösse i ersetzen, und man kann nun die Gleichung (2) als eine homogene lineare Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit constanten Coefficienten für $F(x,i)$ als Funktion von i betrachten; als solche hat sie das allgemeine Integral

$$F(x,i) = \alpha e^{r_1 i} + \beta e^{r_2 i} + \cdots + \sigma e^{r_{m-1} i}$$

oder

$$F(x,i) = (\alpha + \beta i + \gamma i^2 + \cdots)\, e^{r_1 i} + \cdots + \sigma e^{r_p i}, \quad \ldots \quad (3)$$

je nachdem alle Wurzeln der Gleichung

$$r^{m-1} + Ar^{m-2} + Br^{m-3} + \cdots + N = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

von einander verschieden oder einige derselben einander gleich sind. $\alpha, \beta, \gamma \cdots \sigma$ sind von i unabhängige Grössen, die man, wenn man will, dadurch bestimmen kann, dass man dem i $m-1$ spezielle Werthe beilegt. Da $F(x,i)$ eine algebraische Funktion von i ist, so sind die beiden Gleichungen (3) unmöglich; denn dieselben sagen aus, es sei eine algebraische Funktion gleich einer Summe von Exponentialfunktionen; dies ist aber, wie Herr Liouville im zweiten Bande seines Journals, pag. 69 ff., beweist, nie der Fall, die Relation (2) kann folglich nicht stattfinden, wenn $F(x,i)$ eine der oben angegebenen Formen hat.

Zu untersuchen ist nur noch der spezielle Fall, dass einige oder alle Wurzeln der Gleichung (4) gleich Null sind. Verschwinden nur einige derselben, so müssen in dem Ausdruck, der sich für $F(x,i)$ ergibt, die Coefficienten aller Glieder, die noch Exponentialfunktionen enthalten, gleich Null sein, weil wir sonst wieder dieselbe absurde Gleichung wie oben erhielten; das Integral hat mithin, falls überhaupt Wurzeln der Gleichung (4) verschwinden, die Form

$$F(x,i) = \alpha + \beta i + \gamma i^2 + \cdots + \mu i^{n-2},$$

wo $n < m$ oder $n = m$ ist, je nachdem nur einige oder alle Wurzeln dieser Gleichung den Werth Null haben. Hieraus folgt, da man nun i wieder durch ϑ ersetzen kann,

$$F(x,\vartheta) = \alpha + \beta\vartheta + \gamma\vartheta^2 + \cdots + \mu\vartheta^{n-2},$$

und aus dieser Gleichung ergibt sich durch Differentiation

$$F_{\vartheta}^{(n-2)}(x, \vartheta) = (n-2)!\,\mu,$$

man hätte also, da μ von ϑ unabhängig ist, ein Integral unserer Differentialgleichung (A), das ϑ nicht mehr, mithin, weil neue Transcendenten durch die Differentiation von $F(x, \vartheta)$ nicht hervorgerufen werden können, weniger Transcendenten n^{ter} Art als y enthält, das folglich unserer Voraussetzung, nach der in y die Zahl der Transcendenten n^{ter} Art auf ihr Minimum gebracht sein soll, widerspricht.

In jedem Falle ergibt sich daher, wenn wir die Relation (2) als möglich annehmen, ein Widerspruch; eine solche Relation kann deshalb nie stattfinden, d. h. die Integrale

$$F(x, \vartheta),\ F'_{\vartheta}(x, \vartheta), \cdots F_{\vartheta}^{(m-1)}(x, \vartheta)$$

müssen, wenn sie überhaupt möglich sein sollen, ein Fundamentalsystem bilden. Dann ist aber das $(m+1)^{\text{te}}$ Integral $F_{\vartheta}^{(m)}(x, \vartheta)$ jedenfalls in folgender Form darstellbar:

$$F_{\vartheta}^{(m)}(x, \vartheta) = A_1 F_{\vartheta}^{(m-1)}(x, \vartheta) + B_1 F_{\vartheta}^{(m-2)}(x, \vartheta) + \cdots + R_1 F(x, \vartheta)$$

wo die Grössen A_1, $B_1 \cdots R_1$ bestimmte Constanten bedeuten.

Diese Gleichung ist algebraisch in Bezug auf ϑ, man kann dasselbe deshalb durch die unbestimmte Grösse i ersetzen und dann für die entstehende homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten für $F(x, i)$ als Funktion von i genau die oben angestellten Betrachtungen wiederholen. Man gelangt dann zu denselben absurden Resultaten, wie wir sie dort erhalten haben, es ist daher überhaupt nicht möglich, dass das Integral

$$y = F(x, \vartheta)$$

eine Transcendente n^{ter} Art von der Form

$$\vartheta = \log v$$

enthält.

§. 2.

Da wir nun nachgewiesen haben, dass in unserem Integral y, das eine transcendente Funktion n^{ter} Art nach Voraussetzung sein soll, kein Logarithmus n^{ter} Art vorkommen kann, so müssen nothwendig alle darin enthaltenen monomen Transcendenten n^{ter} Art die Form

$$\vartheta = e^{v}$$

haben, wo v eine Funktion $(n-1)^{\text{ter}}$ Art ist.

Eine dieser Exponentialfunktionen heben wir wieder hervor, indem wir das Integral in der Form

$$y = F(x, \vartheta)$$

schreiben, wo wir unter ϑ eine Transcendente n^{ter} Art von der Form e^v verstehen; die Funktion F ist dann algebraisch in Bezug auf ϑ, und es ergibt sich durch Differentiation:

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x, \vartheta),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F_2(x, \vartheta),$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^my}{dx^m} = F_m(x, \vartheta),$$

wo die Funktionen F_1, $F_2 \cdots F_m$ alle in Bezug auf ϑ algebraisch sind. Man erhält, wenn man diese Werthe der Funktion y und ihrer Ableitungen in die Differentialgleichung (A) einsetzt, die Gleichung

$$F_m(x, \vartheta) + P_1F_{m-1}(x, \vartheta) + P_2F_{m-2}(x, \vartheta) + \cdots + P_mF(x, \vartheta) = 0,$$

die, da sie algebraisch ist in Bezug auf ϑ, auch noch erfüllt sein muss, wenn man in ihr $\mu\vartheta$ an die Stelle von ϑ bringt; sie lautet dann

$$F_m(x, \mu\vartheta) + P_1F_{m-1}(x, \mu\vartheta) + \cdots + P_mF(x, \mu\vartheta) = 0. \quad . \quad . \quad (5)$$

Bildet man jetzt von

$$y = F(x, \mu\vartheta)$$

die m ersten Ableitungen, so findet man die gleichen Funktionen von x und $\mu\vartheta$, die man oben von x und ϑ erhielt, d. h. man findet die Werthe

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x, \mu\vartheta),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F_2(x, \mu\vartheta),$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{d^my}{dx^m} = F_m(x, \mu\vartheta),$$

wovon man sich durch Ausrechnung überzeugt, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \vartheta \frac{dv}{dx},$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \vartheta \left[\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right], \text{ u. s. f.}$$

ist. Setzt man die obigen Werthe der Funktion y und ihrer Ableitungen in die Differentialgleichung (A) ein, so ist diese erfüllt; denn als Resultat dieser Operation erhält man nichts anderes als Gleichung (5), es ist somit

$$y = F(x, \mu\vartheta),$$

wo μ eine ganz willkürliche Constante ist, immer ein Integral der Differentialgleichung (A), wenn

$$y = F(x, \vartheta)$$

derselben genügt.

Wie in §. 1 sind auch hier alle Ableitungen von y nach μ Integrale unserer Differentialgleichung, wir bilden uns deshalb, indem wir m mal nach μ differentiiren und nach der Differentiation $\mu = 1$ setzen, folgendes System von Integralen:

$$F(x, \vartheta),\ \vartheta F'_\vartheta(x, \vartheta),\ \vartheta^2 F''_\vartheta(x, \vartheta) \cdots \vartheta^m F^{(m)}_\vartheta(x, \vartheta).$$

Von diesen kann das Integral $\vartheta F'(x, \vartheta)$ nicht für beliebige Werthe von x verschwinden; denn die Gleichung

$$F'_\vartheta(x, \vartheta) = 0$$

ist algebraisch für ϑ, man erhielte mithin, wenn man ϑ durch i ersetzte, durch Integration

$$F(x, i) = F(x, i_0),$$

wo i_0 ein spezieller Werth von i ist, also auch

$$F(x, \vartheta) = F(x, i_0),$$

d. h. $F(x, \vartheta)$ enthielte, gegen die Voraussetzung, ϑ nicht.

Wenn unter den übrigen obigen Integralen, ($F(x, \vartheta)$ selbst ist natürlich hier ausgenommen, da diese Funktion, wenn unsere Betrachtungen überhaupt einen Sinn haben sollen, nicht identisch Null sein kann) sich solche befinden, die für jeden Werth von x verschwinden, und es ist $\vartheta^k F^{(k)}_\vartheta(x, \vartheta)$ unter diesen dasjenige mit dem niedersten Index k, so folgt wie auf pag. 9 aus

$$F^{(k)}_\vartheta(x, \vartheta) = 0$$

die Gleichung

$$F^{(k-1)}_\vartheta(x, \vartheta) = \left[F^{(k-1)}_i(x, i)\right]_{i=i_0},$$

wo $F^{(k-1)}_\vartheta(x, \vartheta)$ nach der eben gemachten Voraussetzung nicht für jeden Werth von x verschwinden kann; wir haben folglich in diesem Falle ein Integral von der Form

$$\vartheta^{k-1} F_{\vartheta}^{(k-1)}(x, \vartheta) = \alpha \vartheta^{k-1},$$

dessen Faktor α die Transcendente ϑ nicht mehr enthält.

Dass wir ein Integral von dieser Form immer finden können, auch wenn keines der obigen Integrale identisch verschwindet, wenn nur die Differentialgleichung (A) überhaupt durch eine explicite Funktion, die Transcendenten enthält, befriedigt werden kann, werden wir nun nachweisen.

Für den Fall, dass keines der $m + 1$ Integrale auf pag. 13 identisch verschwindet, besteht entweder zwischen den m ersten derselben eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten, oder sie bilden ein Fundamentalsystem, und es lässt sich folglich das Integral $\vartheta^m F_{\vartheta}^{(m)}(x, \vartheta)$ als lineare homogene Funktion mit constanten Coefficienten dieser m Integrale ausdrücken.

Ist das erstere der Fall, und bezeichnet man mit $a, b \cdots p$ bestimmte Constanten, so hat man die für ϑ algebraische Gleichung:

$$\vartheta^{m-1} F_{\vartheta}^{(m-1)}(x, \vartheta) + a\vartheta^{m-2} F_{\vartheta}^{(m-2)}(x, \vartheta) + \cdots + pF(x, \vartheta) = 0, \quad (6)$$

die nach dem in der Einleitung citirten Satze des Herrn Liouville bestehen bleiben muss, wenn man ϑ durch die unbestimmte Grösse i ersetzt. Man erhält dann eine homogene lineare Differentialgleichung $(m - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung für $F(x, i)$ als Funktion von i. Das allgemeine Integral derselben lautet

$$F(x, i) = \alpha i^{r_1} + \beta i^{r_2} + \cdots + \sigma i^{r_{m-1}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wenn die Wurzeln $r_1, r_2 \ldots r_{m-1}$ der determinirenden Fundamentalgleichung

$$\begin{aligned} r(r-1)(r-2)\cdots(r-m+1) + ar(r-1)\cdots(r-m+2) \\ + \cdots + lr + p = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

alle von einander verschieden sind. $\alpha, \beta \cdots \sigma$ sind von i unabhängige Grössen, die man bestimmen kann, indem man dem i spezielle Werthe $i_1, i_2 \cdots i_{m-2}, i_{m-1}$ gibt.

Sind einige der Wurzeln r der Gleichung (8) irrational oder imaginär, so müssen die Coefficienten der betreffenden Potenzen von i verschwinden in der Gleichung (7), weil i zu einer irrationalen oder imaginären Potenz erhoben eine Transcendente zweiter Art ist (vgl. Liouville's Journal, t. II, pag. 94), weil man also, wenn diese Coefficienten nicht verschwinden, das absurde Resultat erhielte, es sei eine algebraische Funktion von i gleich einer transcendenten Funktion zweiter Art dieser Variabelen.

Wenn nicht alle Wurzeln in der Gleichung (8) von einander verschieden sind, hat das Integral unserer Differentialgleichung für i einen Werth, in welchem Glieder, die Potenzen von $\log i$ enthalten, vorkommen; die von i unabhängigen Coefficienten dieser Glieder müssen verschwinden, weil sonst wieder die algebraische Funktion $F(x, i)$ von i gleich einer transcendenten Funktion wäre.

Sind endlich alle Wurzeln der Gleichung (8) irrational oder imaginär, so ist die Gleichung (7) unmöglich, die vorausgesetzte Relation (6) kann deshalb in diesem Falle überhaupt nicht bestehen. In jedem Falle aber, wo die Gleichung (8) nicht lauter irrationale oder imaginäre Wurzeln hat, enthält die Gleichung

$$F(x, i) = \alpha i^{r_1} + \beta i^{r_2} + \cdots + \tau i^{r_n},$$

in der $r_1, r_2 \cdots r_n$ die von einander verschiedenen rationalen Wurzeln der Gleichung (8) bezeichnen, keinen Widerspruch, man kann mithin in ihr wieder i durch ϑ ersetzen und erhält demnach unser Integral y in der Form

$$F(x, \vartheta) = \alpha \vartheta^{r_1} + \beta \vartheta^{r_2} + \cdots + \tau \vartheta^{r_n},$$

wo die Grössen $\alpha, \beta \cdots \tau$ von ϑ vollkommen unabhängig sind und als von Null verschieden vorausgesetzt werden.

Aus diesem Integrale kann man, wie wir früher sahen, dadurch, dass man ϑ mit ganz willkürlichen Constanten multiplicirt, beliebig viele neue Integrale der Differentialgleichung (A) bilden. Wir stellen ihm die $n - 1$ folgenden an die Seite:

$$\begin{aligned}
F(x, \mu\vartheta) &= \alpha\mu^{r_1}\vartheta^{r_1} + \beta\mu^{r_2}\vartheta^{r_2} + \cdots + \tau\mu^{r_n}\vartheta^{r_n},\\
F(x, \nu\vartheta) &= \alpha\nu^{r_1}\vartheta^{r_1} + \beta\nu^{r_2}\vartheta^{r_2} + \cdots + \tau\nu^{r_n}\vartheta^{r_n},\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
F(x, \varrho\vartheta) &= \alpha\varrho^{r_1}\vartheta^{r_1} + \beta\varrho^{r_2}\vartheta^{r_2} + \cdots + \tau\varrho^{r_n}\vartheta^{r_n};
\end{aligned}$$

dann ergibt sich, wenn man aus diesen Gleichungen und der Gleichung für $F(x, \vartheta)$ den Werth von $\alpha\vartheta^{r_1}$ berechnet, für diesen der Ausdruck:

$$\alpha\vartheta^{r_1} = \frac{\begin{vmatrix} F(x,\vartheta) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ F(x,\mu\vartheta) & \mu^{r_2} & \mu^{r_3} & \cdots & \mu^{r_n} \\ F(x,\nu\vartheta) & \nu^{r_2} & \nu^{r_3} & \cdots & \nu^{r_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ F(x,\varrho\vartheta) & \varrho^{r_2} & \varrho^{r_3} & \cdots & \varrho^{r_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mu^{r_1} & \mu^{r_2} & \mu^{r_3} & \cdots & \mu^{r_n} \\ \nu^{r_1} & \nu^{r_2} & \nu^{r_3} & \cdots & \nu^{r_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varrho^{r_1} & \varrho^{r_2} & \varrho^{r_3} & \cdots & \varrho^{r_n} \end{vmatrix}}.$$

Da dieser Ausdruck dadurch entsteht, dass man die Integrale $F(x, \vartheta)$, $F(x, \mu\vartheta) \cdots F(x, \varrho\vartheta)$ mit Constanten multiplicirt und addirt, muss er selbst ein Integral unserer Differentialgleichung sein, wir haben somit nachgewiesen, dass es, wenn die Relation (6) besteht, immer ein Integral n^{ter} Art von der Form $\alpha\vartheta^r$ gibt, wo α die Transcendente $\vartheta = e^v$ nicht mehr enthält.

Wenn die Nennerdeterminante in dem sich ergebenden Werthe von $\alpha\vartheta^r$ verschwände, wären die letzten Betrachtungen nicht giltig; dieses Bedenken können wir jedoch fallen lassen, da offenbar die ganz willkürlichen Constanten $\mu, \nu \cdots \varrho$ immer so gewählt werden können, dass diese Determinante nicht verschwindet.

Nachdem wir nun die Existenz eines Integrals von der Form $\alpha\vartheta^r$, wenn zwischen den m ersten Integralen auf pag. 13 eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht, dargethan haben, werden wir jetzt zeigen, dass ein solches Integral sich auch immer finden lässt, wenn die obige Relation nicht existirt, wenn also diese m Integrale ein Fundamentalsystem bilden.

Es besteht dann jedenfalls die Gleichung:

$$\vartheta^m F_\vartheta^{(m)}(x, \vartheta) = A\vartheta^{m-1} F_\vartheta^{(m-1)}(x, \vartheta) + B\vartheta^{m-2} F_\vartheta^{(m-2)}(x, \vartheta)$$
$$+ \cdots + M\vartheta F'_\vartheta(x, \vartheta) + NF(x, \vartheta) = 0,$$

wo die Grössen $A, B \cdots N$ bestimmte Constanten sind. Da diese Gleichung algebraisch ist in Bezug auf ϑ, lässt sich ϑ durch die unbestimmte Grösse i ersetzen, man erhält dann eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung für $F(x, i)$ als Funktion von i, die sich genau so behandeln lässt wie die Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, mit der wir es bis jetzt zu thun hatten; man findet daher auch in diesem Falle ein Integral n^{ter} Art der Differentialgleichung (A) von der Form

$$\alpha\vartheta^r,$$

dessen Faktor α die Transcendente ϑ nicht mehr enthält, wenn es überhaupt ein Integral derselben gibt, welches gleich ist einer expliciten Funktion, in der Transcendenten n^{ter} Art vorkommen.

In diesem Integrale $\alpha\vartheta^r$ kann man jetzt eine zweite Exponentialfunktion n^{ter} Art, die wir mit ζ bezeichnen wollen, herausheben, also etwa setzen

$$\alpha\vartheta^r = \varphi(x, \zeta) = \vartheta^r \varphi_1(x, \zeta),$$

dann lassen sich für dasselbe in Bezug auf ζ ganz dieselben Betrachtungen anstellen, wie wir sie eben für $F(x, \vartheta)$ in Bezug auf ϑ angestellt haben, man erhält ein Integral von der Form

$$\alpha\zeta^s,$$

welches, da es durch Multiplication der Funktionen

$$\begin{aligned}
\varphi(x, \zeta) &= \vartheta^r \varphi_1(x, \zeta), \\
\varphi(x, \mu\zeta) &= \vartheta^r \varphi_1(x, \mu\zeta), \\
\varphi(x, \nu\zeta) &= \vartheta^r \varphi_1(x, \nu\zeta), \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\varphi(x, \sigma\zeta) &= \vartheta^r \varphi_1(x, \sigma\zeta)
\end{aligned}$$

mit Constanten und Addition der entstehenden Werthe gebildet ist, ϑ^r noch als Faktor enthält, das mithin die Form

$$\omega \vartheta^r \zeta^s$$

hat, wo in ω die Transcendenten n^{ter} Art ϑ und ζ nicht mehr vorkommen.

Führt man an diesem Integral wieder dieselben Operationen aus und wiederholt dieses Verfahren so lange, bis alle Exponentialfunktionen n^{ter} Art, die in dem ursprünglichen Integral y vorkommen, auf die eben angegebene Weise behandelt sind, so erhält man schliesslich als Integral der Differentialgleichung (A) eine transcendente Funktion der n^{ten} Art, die alle Exponentialfunktionen n^{ter} Art als Faktoren enthält. Dieselbe hat, wenn $u, v, w \cdots$ transcendente Funktionen $(n-1)^{\text{ter}}$ Art bedeuten, also

$$\vartheta = e^v, \ \zeta = e^w, \ \eta = e^u \cdots$$

die vorkommenden Transcendenten n^{ter} Art sind, die Gestalt

$$\sigma \vartheta^r \zeta^s \eta^p \cdots = \sigma e^{rv+sw+pu+\cdots} = \sigma e^{\omega};$$

σ und ω können höchstens Transcendenten $(n-1)^{\text{ter}}$ Art enthalten, sind mithin transcendente Funktionen von höchstens $(n-1)^{\text{ter}}$ Art. Es gilt daher der Satz:

Wenn überhaupt eine transcendente Funktion n^{ter} Art der Differentialgleichung (A) genügt, so hat dieselbe ein Integral von der Form

$$y = \sigma e^{\omega},$$

in welchem σ und ω transcendente Funktionen höchstens $(n-1)^{\text{ter}}$ Art sind.

§. 3.

Um die Beschaffenheit dieses Integrales näher zu untersuchen, setzen wir

$$y = \sigma e^{\omega} = e^{\int t\,dx};$$

dann kann, da man für t die Gleichung

$$t = \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dx} + \frac{d\omega}{dx}$$

hat, diese Funktion t, wenn sie eine transcendente Funktion ist, höchstens eine solche von $(n-1)^{\text{ter}}$ oder noch niedererer Art sein. Wie wir sogleich sehen werden, kann aber t überhaupt keine Transcendenten enthalten; wir beweisen nämlich, dass, wenn t eine transcendente Funktion q^{ter} Art wäre (wo q selbstverständlich kleiner als n sein muss), unserer Differentialgleichung (A) ein Integral, das als Transcendenten höchster Art nur solche von der q^{ten} Art enthielte, genügen müsste, dass folglich gegen die Voraussetzung unser Integral y nicht die transcendente Funktion niederster Art wäre, die der Differentialgleichung (A) genügt.

Nehmen wir an, es sei

$$t = \varphi(x, \vartheta),$$

wo ϑ eine Exponentialfunktion q^{ter} Art bedeuten und die Anzahl der in φ vorkommenden Transcendenten q^{ter} Art auf ein Minimum reducirt sein soll. Aus dem Integral

$$y = e^{\int \varphi(x, \vartheta)\, dx}$$

ergibt sich dann durch Differentiation

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \varphi(x, \vartheta)\, y, \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \chi_2(x, \vartheta)\, y, \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= \chi_3(x, \vartheta)\, y, \\
&\vdots \\
\frac{d^my}{dx^m} &= \chi_m(x, \vartheta) y;
\end{aligned}$$

die Funktionen $\chi_2, \chi_3 \cdots \chi_m$, die hier zur Abkürzung eingeführt sind, setzen sich zusammen lediglich aus der Funktion φ und deren Ableitungen und zwar nur unter Anwendung der Operationen der Addition und Multiplication, sie sind mithin alle algebraisch in Bezug auf ϑ. Wenn man die eben gefundenen Werthe von y und dessen Ableitungen in die Differentialgleichung (A) einsetzt, folgt die für ϑ algebraische Gleichung

$$\chi_m(x, \vartheta) + P_1 \chi_{m-1}(x, \vartheta) + \cdots + P_{m-1}\varphi(x, \vartheta) + P_m = 0,$$

die noch erfüllt sein muss, wenn wir $\mu\vartheta$ an Stelle von ϑ in sie einführen (μ bedeutet wie seither eine willkürliche Constante). Die Gleichung lautet dann

$$\chi_m(x, \mu\vartheta) + P_1 \chi_{m-1}(x, \mu\vartheta) + \cdots + P_{m-1}\varphi(x, \mu\vartheta) + P_m = 0. \quad (9)$$

Bildet man direkt von

$$y_1 = e^{\int \varphi(x, \mu\vartheta)\, dx}$$

die Ableitungen nach x, so ergeben sich, weil ϑ eine Exponentialfunktion ist, hier dieselben Funktionen von x und $\mu\vartheta$, die wir auf pag. 18 von x und ϑ erhielten, d. h. man findet

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_1\, \varphi(x, \mu\vartheta), \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= y_1\, \chi_2(x, \mu\vartheta), \\ &\vdots \\ \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} &= y_1\, \chi_{m-1}(x, \mu\vartheta), \\ \frac{d^m y_1}{dx^m} &= y_1\, \chi_m(x, \mu\vartheta). \end{aligned} \qquad \ldots\ldots \quad (10)$$

Die Gleichung, die entsteht, wenn man diese Werthe in die Differentialgleichung (A) einsetzt, stimmt genau mit der Gleichung (9) überein; unsere Differentialgleichung ist somit durch jedes Integral von der Form

$$y_1 = e^{\int \varphi(x, \mu\vartheta)\, dx}$$

zu befriedigen, wenn ihr die Funktion

$$y = e^{\int \varphi(x, \vartheta)\, dx}$$

genügt.

Wir sahen früher, dass in diesem Falle auch alle Ableitungen von y_1 nach μ Integrale der Differentialgleichung (A) sind, es muss deshalb, wenn wir die $m - 1$ ersten dieser Ableitungen bilden, für diese die folgende Gleichung bestehen:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1, & \frac{\partial y_1}{\partial \mu}, & \frac{\partial^2 y_1}{\partial \mu^2}, & \ldots & \frac{\partial^{m-1} y_1}{\partial \mu^{m-1}} \\ \frac{dy_1}{dx}, & \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \mu}\right), & \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial \mu^2}\right), & \ldots & \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{m-1} y_1}{\partial \mu^{m-1}}\right) \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2}, & \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \mu}\right), & \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial \mu^2}\right), & \ldots & \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial^{m-1} y_1}{\partial \mu^{m-1}}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}, & \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \mu}\right), & \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial \mu^2}\right), & \ldots & \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{\partial^{m-1} y_1}{\partial \mu^{m-1}}\right) \end{vmatrix}$$

$$= c e^{-\int P_1\, dx},$$

wo die Constante c von Null verschieden oder gleich Null ist, je nachdem die m Integrale

$$y_1, \frac{\partial y_1}{\partial \mu}, \frac{\partial^2 y_1}{\partial \mu^2}, \cdots \frac{\partial^{m-1} y_1}{\partial \mu^{m-1}}$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (A) bilden oder nicht. (Vgl. die Abhandlung des Herrn Fuchs „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen", Borchardt's Journal, Bd. 66, pag. 126 ff.)

Um die Determinante Δ passend umzuformen, kehren wir in ihr zunächst die Reihenfolge der Differentiationen nach x und μ in den einzelnen Gliedern um und führen dann mit Hilfe der Formeln (10) die Differentiationen von $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \cdots \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}$ nach μ aus:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{dy_1}{dx}\right) = y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \varphi \frac{\partial y_1}{\partial \mu},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\left(\frac{dy_1}{\partial x}\right) = y_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} + 2 \frac{\partial y_1}{\partial \mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \varphi \frac{\partial^2 y_1}{\partial \mu^2},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial \mu^{m-1}}\left(\frac{dy_1}{dx}\right) = y_1 \frac{\partial^{m-1} \varphi}{\partial \mu^{m-1}} + (m-1)_1 \frac{\partial y_1}{\partial \mu} \frac{\partial^{m-2} \varphi}{\partial \mu^{m-2}} + \cdots + \varphi \frac{\partial^{m-1} y_1}{\partial \mu^{m-1}},$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right) = y_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial \mu} + \chi_2 \frac{\partial y_1}{\partial \mu} \text{ u. s. f.}$$

Wenn man, nachdem diese Differentiationen so weit vollführt sind, die Glieder der ersten Horizontalreihe von Δ mit φ, resp. $\chi_2, \chi_3 \cdots \chi_{m-1}$ multiplicirt und dann von den entsprechenden Gliedern der zweiten, resp. dritten, vierten, $\cdots$ m^{ten} Reihe subtrahirt, so verschwinden alle Glieder der ersten Verticalcolonne mit Ausnahme desjenigen, das der ersten Reihe angehört, und man erhält für die Determinante Δ den folgenden Ausdruck:

$$\begin{vmatrix} y_1 & \frac{\partial y_1}{\partial \mu} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial \mu^2} & \cdots & \frac{\partial^{m-1} y_1}{\partial \mu^{m-1}} \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{dy_1}{dx}\right) & \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\left(\frac{dy_1}{dx}\right) & \cdots & \frac{\partial^{m-1}}{\partial \mu^{m-1}}\left(\frac{dy_1}{dx}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} & \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}\right) & \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\left(\frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}\right) & \cdots & \frac{\partial^{m-1}}{\partial \mu^{m-1}}\left(\frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}\right) \end{vmatrix}$$

$$= y_1 \begin{vmatrix} y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}, & y_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} + 2\frac{\partial y_1}{\partial \mu}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}, & y_1 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \mu^3} + 3\frac{\partial y_1}{\partial \mu}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} + 3\frac{\partial^2 y_1}{\partial \mu^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}, \cdots \\ y_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial \mu}, & y_1 \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \mu^2} + 2\frac{\partial y_1}{\partial \mu}\frac{\partial \chi_2}{\partial \mu}, & y_1 \frac{\partial^3 \chi_2}{\partial \mu^3} + 3\frac{\partial y_1}{\partial \mu}\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \mu^2} + 3\frac{\partial^2 y_1}{\partial \mu^2}\frac{\partial \chi_2}{\partial \mu}, \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1 \frac{\partial \chi_{m-1}}{\partial \mu}, & y_1 \frac{\partial^2 \chi_{m-1}}{\partial \mu^2} + 2\frac{\partial y_1}{\partial \mu}\frac{\partial \chi_{m-1}}{\partial \mu}, & y_1 \frac{\partial^3 \chi_{m-1}}{\partial \mu^3} + 3\frac{\partial y_1}{\partial \mu}\frac{\partial^2 \chi_{m-1}}{\partial \mu^2} + 3\frac{\partial^2 y_1}{\partial \mu^2}\frac{\partial \chi_{m-1}}{\partial \mu}, \cdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cdots y_1 \frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial \mu^{m-1}} + (m-1)_1 \frac{\partial y_1}{\partial \mu}\frac{\partial^{m-2}\varphi}{\partial \mu^{m-2}} + \cdots + (m-1)\frac{\partial^{m-2} y_1}{\partial \mu^{m-2}}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}, \\ \cdots y_1 \frac{\partial^{m-1}\chi_2}{\partial \mu^{m-1}} + (m-1)_1 \frac{\partial y_1}{\partial \mu}\frac{\partial^{m-2}\chi_2}{\partial \mu^{m-2}} + \cdots + (m-1)\frac{\partial^{m-2} y_1}{\partial \mu^{m-2}}\frac{\partial \chi_2}{\partial \mu}, \\ \vdots \\ \cdots y_1 \frac{\partial^{m-1}\chi_{m-1}}{\partial \mu^{m-1}} + (m-1)_1 \frac{\partial y_1}{\partial \mu}\frac{\partial^{m-2}\chi_{m-1}}{\partial \mu^{m-2}} + \cdots + (m-1)\frac{\partial^{m-2} y_1}{\partial \mu^{m-2}}\frac{\partial \chi_{m-1}}{\partial \mu}, \end{vmatrix}$$

Wie man sieht, tritt y_1 noch einmal aus dieser Determinante heraus. Multiplicirt man jetzt die Glieder ihrer ersten Colonne mit

$$-2\frac{\partial y_1}{\partial \mu}, \text{ resp. } -3\frac{\partial^2 y_1}{\partial \mu^2}, \cdots, -(m-1)\frac{\partial^{m-2} y_1}{\partial \mu^{m-2}}$$

und addirt sie zu den entsprechenden Gliedern der zweiten, resp. dritten, vierten, $\cdots$ $(m-1)^{\text{ten}}$ Colonne, so fällt in jeder dieser Colonnen der letzte Summand jedes Gliedes weg, und aus der zweiten derselben lässt sich nun auch y_1 heraussetzen. Wenn man hierauf die Glieder dieser Colonne mit

$$-3\frac{\partial y_1}{\partial \mu}, \text{ resp. } -(4)_2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \mu^2}, \cdots -(m-1)_2 \frac{\partial^{m-3} y_1}{\partial \mu^{m-3}}$$

multiplicirt und dann zu denjenigen der dritten, resp. vierten, $\cdots$ $(m-1)^{\text{ten}}$ Colonne addirt, so fallen in diesen wieder in jedem Gliede die letzten Summanden heraus, und man kann jetzt auch aus der dritten Colonne y_1 herausnehmen. Man sieht ein, dass man durch Fortsetzung dieses Verfahrens schliesslich zu folgender Gleichung kommt:

$$\Delta = y_1^m \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}, \cdots & \frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial \mu^{m-1}} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \mu}, & \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \mu^2}, \cdots & \frac{\partial^{m-1}\chi_2}{\partial \mu^{m-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \chi_{m-1}}{\partial \mu}, & \frac{\partial^2 \chi_{m-1}}{\partial \mu^2}, \cdots & \frac{\partial^{m-1}\chi_{m-1}}{\partial \mu^{m-1}} \end{vmatrix} = c e^{-\int P_1 dx}; \quad \cdots (11)$$

aus ihr aber ergibt sich, wenn c von Null verschieden ist (den Fall $c = 0$ behandeln wir nachher), y_1 gleich einer Funktion, die Transcendenten von höchstens q^{ter} Art enthält; denn die Determinante, die lediglich aus $\varphi(x, \mu\vartheta)$ und den Ableitungen dieser Funktion nach x und μ zusammengesetzt ist, enthält höchstens solche, und $e^{-\int P_1 dx}$ ist eine Transcendente erster Art, weil P_1 nach der Voraussetzung eine ganze rationale Funktion von x ist. Dieses Integral y_1 der Differentialgleichung (A) enthielte daher nur Transcendenten von niedererer als n^{ter} Art, es wäre somit das y, das wir unseren Betrachtungen zu Grunde gelegt haben, als Integral n^{ter} Art nicht dasjenige, das unter allen Integralen dieser Differentialgleichung von der niedersten Art ist.

Aus diesem Widerspruch folgt, dass die Funktion t, falls die Constante c in der Gleichung (11) von Null verschieden ist, keine Exponentialfunktion q^{ter} Art enthalten kann.

Ist in der Gleichung (11) $c = 0$, so muss die Determinante auf der linken Seite dieser Gleichung, die wir mit D bezeichnen wollen, ebenfalls verschwinden. Wenn wir berücksichtigen, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} &= \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \mu \vartheta} , \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} &= \vartheta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu \vartheta^2} , \\
&\vdots \\
\frac{\partial^{m-1} \varphi}{\partial \mu^{m-1}} &= \vartheta^{m-1} \frac{\partial^{m-1} \varphi}{\partial \mu \vartheta^{m-1}} , \\
\frac{\partial \chi_2}{\partial \mu} &= \vartheta \frac{\partial \chi_2}{\partial \mu \vartheta} , \\
&\vdots \\
\frac{\partial \chi_{m-1}}{\partial \mu} &= \vartheta \frac{\partial \chi_{m-1}}{\partial \mu \vartheta} , \\
&\vdots \\
\frac{\partial^{m-1} \chi_{m-1}}{\partial \mu^{m-1}} &= \vartheta^{m-1} \frac{\partial^{m-1} \chi_{m-1}}{\partial \mu \vartheta^{m-1}}
\end{aligned}$$

ist, so folgt, sobald wir die ganz willkürliche Constante $\mu = 1$ setzen,

$$D = \vartheta^{\frac{m(m-1)}{2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}, & \cdots & \frac{\partial^{m-1} \varphi}{\partial \vartheta^{m-1}} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \vartheta}, & \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \vartheta^2}, & \cdots & \frac{\partial^{m-1} \chi_2}{\partial \vartheta^{m-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \chi_{m-1}}{\partial \vartheta}, & \frac{\partial^2 \chi_{m-1}}{\partial \vartheta^2}, & \cdots & \frac{\partial^{m-1} \chi_{m-1}}{\partial \vartheta^{m-1}} \end{vmatrix},$$

und es muss, wenn $D = 0$ ist, diese Determinante, die wir mit D' bezeichnen wollen, verschwinden. Da die Gleichung $D' = 0$ algebraisch ist in Bezug auf ϑ, so lässt sich in ihr ϑ durch die unbestimmte Grösse i ersetzen. Fasst man nun ihre Glieder als Funktionen von i auf, so sind die Glieder ihrer Verticalcolonnen die successiven Ableitungen der Glieder der ersten Colonne nach i, es muss mithin, wenn $D' = 0$ sein soll, die Relation

$$c_1 \frac{\partial \varphi(x,i)}{\partial i} + c_2 \frac{\partial \chi_2(x,i)}{\partial i} + \cdots + c_{m-1} \frac{\partial \chi_{m-1}(x,i)}{\partial i} = 0$$

bestehen, wo die Grössen c in Bezug auf i sich wie Constanten verhalten. (Vgl. die Abhandlung des Herrn Fuchs „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen", Borchardt's Journal, Bd. 66, §. 2.) Durch Integration folgt aus der letzten Gleichung

$$\begin{aligned} &c_1 \varphi(x,i) + c_2 \chi_2(x,i) + \cdots + c_{m-1} \chi_{m-1}(x,i) \\ &= c_1 \varphi(x,i_0) + c_2 \chi_2(x,i_0) + \cdots + c_{m-1} \chi_{m-1}(x,i_0); \end{aligned}$$

hier könnte man auf der linken Seite wieder i durch ϑ ersetzen und erhielte so eine in Bezug auf ϑ algebraische Gleichung; den sich aus derselben ergebenden Werth von ϑ könnte man in φ einsetzen, es wäre also gegen die Voraussetzung in der Funktion φ die Anzahl der vorkommenden Transcendenten q^{ter} Art nicht auf ihr Minimum reducirt. Somit ist auch für den Fall, dass in Gleichung (11) $c = 0$ ist, nachgewiesen, dass in der Funktion φ eine Exponentialgrösse q^{ter} Art nicht auftreten kann.

Dass auch kein Logarithmus q^{ter} Art in t enthalten sein kann, findet man durch folgende Ueberlegung:

Es sei in dem Integral der Differentialgleichung (A)

$$y = e^{\int \varphi(x,\vartheta)\,dx}$$

ϑ ein Logarithmus der q^{ten} Art, dann überzeugt man sich genau wie auf pag. 18 ff., dass auch

$$y_1 = e^{\int \varphi(x, \mu + \vartheta)\, dx}$$

dieser Differentialgleichung genügt. Wenn wir jetzt die $m - 1$ ersten Ableitungen von y_1 nach μ bilden und genau die eben angestellten Betrachtungen wiederholen, so erhalten wir eine Gleichung, die in der Form mit der Gleichung (11) vollkommen übereinstimmt, wir haben also, falls c von Null verschieden ist, wieder ein Integral der Differentialgleichung (A), das Transcendenten von höchstens q^{ter} Art enthält, das somit den von uns gemachten Voraussetzungen widerspricht.

Ist $c = 0$, so bringt man die Determinante D unter Berücksichtigung, dass, wenn man nach der Differentiation $\mu = 0$ setzt, die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)_0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}, \\
\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}\right)_0 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}, \\
&\vdots \\
\left(\frac{\partial^{m-1} \varphi}{\partial \mu^{m-1}}\right)_0 &= \frac{\partial^{m-1} \varphi}{\partial \vartheta^{m-1}}, \\
\left(\frac{\partial \chi_2}{\partial \mu}\right)_0 &= \frac{\partial \chi_2}{\partial \vartheta}, \\
&\vdots \\
\left(\frac{\partial^{m-1} \chi_{m-1}}{\partial \mu^{m-1}}\right)_0 &= \frac{\partial^{m-1} \chi_{m-1}}{\partial \vartheta^{m-1}}
\end{aligned}$$

bestehen, auf die Form

$$D = \begin{vmatrix}
\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}, & \cdots & \frac{\partial^{m-1} \varphi}{\partial \vartheta^{m-1}} \\
\frac{\partial \chi_2}{\partial \vartheta}, & \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \vartheta^2}, & \cdots & \frac{\partial^{m-1} \chi_2}{\partial \vartheta^{m-1}} \\
\vdots & & & \\
\frac{\partial \chi_{m-1}}{\partial \vartheta}, & \frac{\partial^2 \chi_{m-1}}{\partial \vartheta^2}, & \cdots & \frac{\partial^{m-1} \chi_{m-1}}{\partial \vartheta^{m-1}}
\end{vmatrix}$$

und erhält aus ihr, da sie gleich Null sein muss, genau wie auf pag. 23 eine Gleichung, die erlaubt, ϑ durch die übrigen Transcendenten, die in φ vorkommen, auszudrücken; man geräth daher mit der Voraussetzung, dass die Anzahl der in φ enthaltenen Transcendenten auf ihr Minimum gebracht ist, in Widerspruch. Daraus folgt, dass t nie einen

Logarithmus q^{ter} Art, dass diese Funktion somit überhaupt keine Transcendenten enthalten kann, d. h. dass sie eine algebraische Funktion von x sein muss.

§. 4.

Um die Beschaffenheit der algebraischen Funktion, der die Funktion t gleich ist, festzustellen, stützen wir uns auf folgenden, in der oben citirten Abhandlung des Herrn Fuchs (Borchardt's Journal, Bd. 66, pag. 121 ff.) bewiesenen Satz, den wir gleich in der Form, in der wir von ihm Gebrauch machen, aussprechen:

Jedes Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung kann singuläre Punkte nur in solchen Punkten der Ebene der x besitzen, in denen die Coefficienten der Differentialgleichung aufhören, endliche und stetige Funktionen von x zu sein.

Da die Coefficienten der Differentialgleichung (A) überall ausser im Unendlichen holomorphe Funktionen von x sind, also für sie nur der unendlich entfernte Punkt ein singulärer ist, so muss t in dem Integrale

$$y = e^{\int t dx}$$

als algebraische Funktion gleich sein einer ganzen rationalen Funktion von x plus einer Summe von Ausdrücken von der Form

$$\frac{A}{x-a},$$

deren Zähler positive ganze Zahlen sind.

Man sieht dies auf folgende Weise ein:

Die Funktion $\int t dx$ hat dieselben singulären Punkte wie t, die Funktion $e^{\int t dx}$ besitzt von diesen singulären Punkten nur diejenigen nicht, die in $\int t dx$ dadurch, dass Summanden wie $\log (x-a)^A$ vorkommen, in der endlichen Ebene auftreten (es ist nämlich der Punkt a für $e^{\log (x-a)^A} = (x-a)^A$, wenn A eine positive ganze Zahl ist, kein singulärer Punkt), man hat folglich, da $y = e^{\int t dx}$ eine überall ausser im unendlich entfernten Punkte endliche und stetige Funktion von x sein soll, für $\int t dx$ einen Ausdruck zu setzen von folgender Gestalt:

$$\int t dx = g_1(x) + \log (x-a)^A + \log (x-b)^B + \cdots + \log (x-k)^K$$

($g_1(x)$ bezeichnet eine ganze rationale Funktion von x, $A, B, \cdots K$ sind positive ganze Zahlen); denn ein solcher Ausdruck genügt den

Anforderungen, die wir an das Integral y stellen und ergibt für t die algebraische Funktion

$$t = g(x) + \sum \frac{A}{x-a};$$

die Summe hat selbstverständlich, da t eine algebraische Funktion ist, nur eine endliche Anzahl von Gliedern.

Etwas über den Grad der in t enthaltenen ganzen rationalen Funktion auszusagen, gelingt durch folgende Ueberlegung:

Wir denken uns die Differentialgleichung für t gebildet und stellen dieselbe dar in der Form

$$t^m + P_1 t^{m-1} + P_2 t^{m-2} + \cdots + P_{m-1} t + P_m + f(t) = 0, \quad (12)$$

wo in $f(t)$ alle Glieder zusammengefasst sind, die Ableitungen von t nach x enthalten. Setzt man für t seinen Werth $g(x) + \sum \frac{A}{x-a_i}$, so kann die höchste Potenz von x, die überhaupt auftritt, nicht in $f(t)$, sondern nur in den vor $f(t)$ stehenden Gliedern der Gleichung (12) auftreten. Bildet man nämlich die Ableitungen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots \frac{d^my}{dx^m}$, so erhält man in $\frac{d^ky}{dx^k}$ ein Glied t^k und ausser diesem nur Produkte von höchstens k der Faktoren $t, \frac{dt}{dx}, \cdots \frac{d^{k-1}t}{dx^{k-1}}$; in allen diesen Produkten kommt mindestens eine Ableitung von t nach x vor, die höchste Potenz von x ist also in allen eine niederere als in t^k, es kann deshalb unter allen Gliedern, die $P_k \frac{d^ky}{dx^k}$ bei der Entwickelung liefert, nur das Glied $P_k t^k$ bei der Gradbestimmung in Betracht kommen.

Wenn wir den gesuchten Grad der ganzen Funktion $g(x)$ mit r, die gegebenen Grade der Coefficienten $P_1, P_2 \cdots P_m$ mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_m$ bezeichnen, so haben die höchsten Exponenten der in Betracht kommenden Glieder der Gleichung (12) die Werthe

$$mr,\ (m-1)r + \varepsilon_1,\ (m-2)r + \varepsilon_2,\ \cdots r + \varepsilon_{m-1},\ \varepsilon_m. \quad (13)$$

Ist ε_1 die grösste unter den Zahlen ε, so besteht, da mindestens zwei Glieder, die den höchsten Exponenten von x enthalten, vorkommen müssen, wenn die Gleichung (12) überhaupt durch ein t von der gegebenen Beschaffenheit erfüllt werden soll, die Gleichung

$$mr = (m-1)r + \varepsilon_1,$$

es ist also

$$r = \varepsilon_1.$$

Falls ε_2 die grösste unter den Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_m$ ist, so sind in der Reihe (13) alle hinter $(m-2)r+\varepsilon_2$ stehenden Exponenten kleiner als dieser, man hat mithin zur Bestimmung des Grades r eine der drei Gleichungen:

$$mr = (m-1)r + \varepsilon_1,$$
$$mr = (m-2)r + \varepsilon_2,$$
$$(m-1)r + \varepsilon_1 = (m-2)r + \varepsilon_2,$$

aus denen sich für r die drei Möglichkeiten

$$r = \varepsilon_1,$$
$$r = \frac{\varepsilon_2}{2},$$
$$r = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

ergeben.

Auf diese Weise findet man ganz allgemein:

Wenn ε_k unter allen vorkommenden Grössen ε die grösste ist, muss r einen der folgenden $\frac{(k+1)k}{2}$ Werthe haben:

$$\varepsilon_1,$$
$$\frac{\varepsilon_2}{2}, \ \varepsilon_2 - \varepsilon_1,$$
$$\frac{\varepsilon_3}{3}, \ \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2}, \ \varepsilon_3 - \varepsilon_2,$$
$$\frac{\varepsilon_4}{4}, \ \frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_1}{3}, \ \frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_2}{2}, \ \varepsilon_4 - \varepsilon_3,$$
$$\vdots$$
$$\frac{\varepsilon_k}{k}, \ \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_1}{k-1}, \ \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_2}{k-2}, \cdots \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}}{2}, \ \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1},$$

wobei selbstverständlich die nicht ganzzahligen unter diesen Werthen bei Aufstellung der Tabelle auszuschliessen sind.

Es ergibt sich hieraus z. B., dass die Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} = Py$$

durch explicite Funktionen, die Transcendenten enthalten, nur befriedigt werden kann, wenn der Grad der ganzen rationalen Funktion P von x durch m theilbar ist.

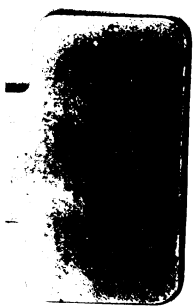
Was die Zähler $A, B, \cdots K$ der in t auftretenden Partialbrüche anbetrifft, so findet man, dass ihre Werthe sämmtlich der Gleichung

$$z(z-1)(z-2)\cdots(z-m+1) = 0$$

Wenn wir zum Schlusse die im Laufe unserer Untersuchung gewonnenen Resultate wiederholen, so können wir dieselben in die folgenden beiden Sätze zusammenfassen:

1. Wenn die Differentialgleichung (A), deren Coefficienten ganze rationale Funktionen von x sind, durch eine explicite Funktion, die Transcendenten enthält, befriedigt wird, so besitzt sie immer ein particuläres Integral von der Form

$$y = (x-a)^A (x-b)^B \cdots (x-k)^K e^{g_1(x)};$$

der Grad der ganzen rationalen Funktion $g_1(x)$ ist nach der Tabelle auf pag. 27 zu bestimmen, $A, B, \cdots K$ sind positive ganze Zahlen, die alle kleiner als m sein müssen.

2. Jedes Integral der Differentialgleichung (A), das gleich einer algebraischen Funktion von x ist, muss eine ganze rationale Funktion von x sein, und es ist ein solches Integral nur möglich, wenn die Gleichung (14), pag. 29, positive ganzzahlige Wurzeln besitzt; ob dasselbe dann wirklich existirt, muss in jedem gegebenen Falle durch Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten entschieden werden.